

Méth. Mat. Phys. - Chapitre 2

Analyse complexe



- 2.1 Equations de Cauchy-Riemann et de Laplace
- 2.2 Théorème et formule de Cauchy
- 2.3 Série de Laurent
- 2.4 Théorème des résidus
- 2.5 Potentiel électrostatique dans un conducteur cylindrique
- 2.6 Théorème des résidus et loi d'Ampère
- 2.7 Identité remarquable

- **Fonction complexe** : où $z = x + iy \in \mathbb{C}$ dérivable en z

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (2.1)$$

- **Dérivée** : fonction complexe : les limites commutent

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u(x, y) + i \Delta v(x, y)}{\Delta x + i \Delta y} \quad (2.2)$$

- **Première approche** : premièrement $\Delta y \rightarrow 0$ deuxièmement $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad (2.3)$$

- **Deuxième approche** : premièrement $\Delta x \rightarrow 0$ deuxièmement $\Delta y \rightarrow 0$

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v(x, y)}{\Delta y} - i \frac{\Delta u(x, y)}{\Delta y} \right) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \quad (2.4)$$

- **Equations de Cauchy-Riemann** : fonction holomorphe (dérivable)

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = - \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad (2.5)$$

- **Théorème de Schwarz :**

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y \partial x} \quad (2.6)$$

- **Dérivées partielles :** équations de Cauchy - Riemann

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y \partial x} = - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} &= - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} = - \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

- **Equations de Laplace :** à 2 dimensions (parties réelle et imaginaire)

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(x, y) &= \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \\ \nabla^2 v(x, y) &= \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

- **Théorème de Cauchy** : intégrale d'une fonction complexe holomorphe $f(z)$ sur un chemin fermé (contour) \mathcal{C}

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0 \quad (2.9)$$

- **Démonstration** : (2.10) fonction holomorphe $f(z)$

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \oint_{\mathcal{C}} (u + iv)(dx + idy) = \oint_{\mathcal{C}} (u dx - v dy) + i \oint_{\mathcal{C}} (v dx + u dy)$$

- **Théorème du Stokes** : (2.11) $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, $d\mathbf{s} = (dx, dy)$, $\mathcal{C} = \partial\mathcal{A}$

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\mathcal{C}} (v_x dx + v_y dy) = \int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A} = \int_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx dy$$

- **Stokes et Cauchy-Riemann** : 1^{ère} intégrale : $v_x = u$ et $v_y = -v$

$$\oint_{\mathcal{C}} (u dx - v dy) = - \int_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (2.12)$$

- **Stokes et Cauchy-Riemann** : 2^e intégrale : $v_x = v$ et $v_y = u$

$$\oint_{\mathcal{C}} (v dx + u dy) = \int_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad \square \quad (2.13)$$

- **Intégrale :** $f(z)$ analytique dans \mathbb{C} et $z_0 \in \text{int } \mathcal{C}$ et $z = z_0 + re^{i\theta}$ (2.16)

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = f(z_0) i \int_0^{2\pi} d\theta \quad (2.17)$$

- **Formule intégrale de Cauchy :** $f(z)$ analytique dans \mathbb{C} et $z_0 \in \text{int } \mathcal{C}$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (2.18)$$

- **Série de Laurent :** $f(z)$ analytique dans $\mathbb{C} \setminus z_0$ autour de la singularité z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (2.19)$$

- **Intégrales :** $n \neq -1$ et $n = -1$: et $z_0 \in \text{int } \mathcal{C}$ et $z = z_0 + re^{i\theta}$ (2.16)

$$\oint_{\mathcal{C}} (z - z_0)^n dz = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = r^{n+1} \frac{e^{i(n+1)\theta}}{n+1} \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad (2.21)$$

$$\oint_{\mathcal{C}} (z - z_0)^{-1} dz = \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - z_0} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \quad (2.22)$$

- **Intégrale d'une série de Laurent** : (2.19) – (2.22) donne (2.23)

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_{\mathcal{C}} (z - z_0)^n dz = a_{-1} \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i a_{-1}$$

- **Pôle simple** : de $f(z)$ en $z = z_0$: petit degré non-nul $n = -1$

$$(z - z_0) f(z) = a_{-1} + a_0 (z - z_0) + a_1 (z - z_0)^2 + \dots \quad (2.24)$$

- **Résidu d'un pôle simple** : de $f(z)$ en $z = z_0$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \quad (2.25)$$

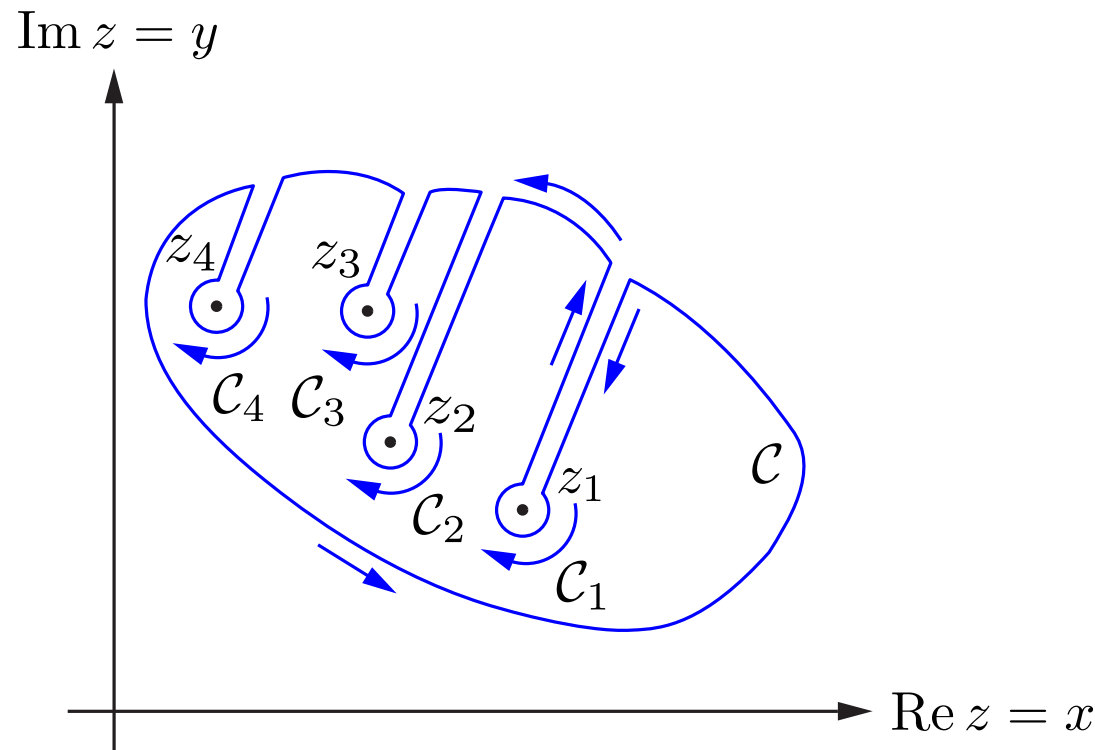
- **Pôle d'ordre n** : de $f(z)$ en $z = z_0$: petit degré non-nul $-n$

$$(z - z_0)^n f(z) = a_{-n} + \dots + a_{-1} (z - z_0)^{n-1} + a_0 (z - z_0)^n + \dots \quad (2.26)$$

- **Résidu d'un pôle d'ordre n** : de $f(z)$ en $z = z_0$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z - z_0)^n f(z) \right) \quad (2.27)$$

- **Fonction singulière** : $f(z)$ avec n singularités $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$



- **Théorème de Cauchy** : contour $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_n$ orienté dans le sens trigonométrique dans la limite où la largeur des n branches tend vers zéro

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz + \oint_{\mathcal{C}_1} f(z) dz + \dots + \oint_{\mathcal{C}_n} f(z) dz = 0 \quad (2.28)$$

Le contour extérieur \mathcal{C} est orienté dans le sens trigonométrique et les contours intérieurs $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ sont orientés dans le sens horaire.

- **Théorème de Cauchy :**

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = - \oint_{\mathcal{C}_1} f(z) dz - \dots - \oint_{\mathcal{C}_n} f(z) dz \quad (2.29)$$

- **Intégrale de la série de Laurent :** autour de la singularité z_k : contour \mathcal{C}_k orienté dans le sens horaire

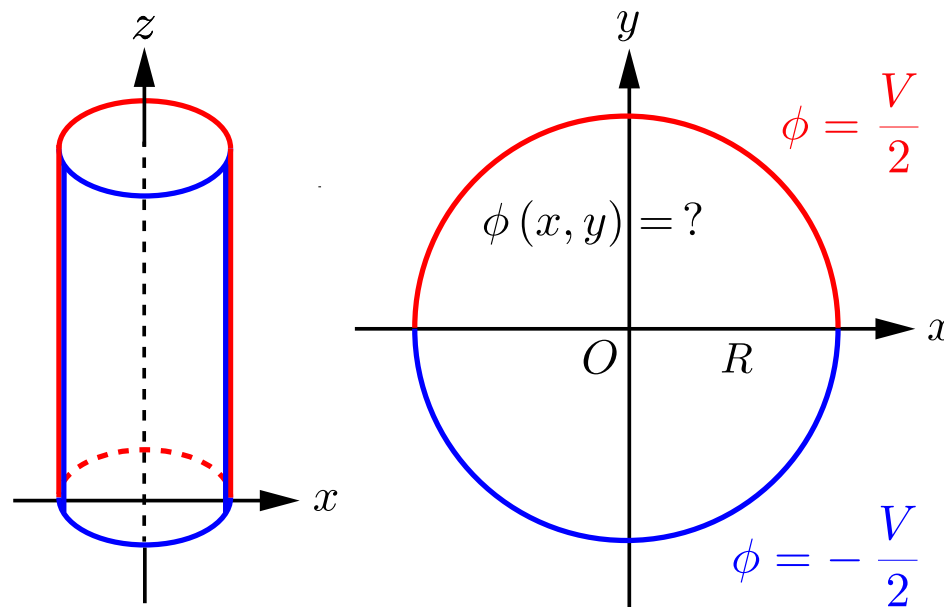
$$\oint_{\mathcal{C}_k} f(z) dz = -2\pi i a_{-1,k} = -2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) \quad (2.30)$$

Le signe $-$ est dû à l'orientation des contours \mathcal{C}_k dans le sens horaire.

- **Théorème des résidus :** de $f(z)$ en $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ singularités : pôles

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) \quad (2.31)$$

- **Cylindre conducteur creux** : rayon R et longueur infinie



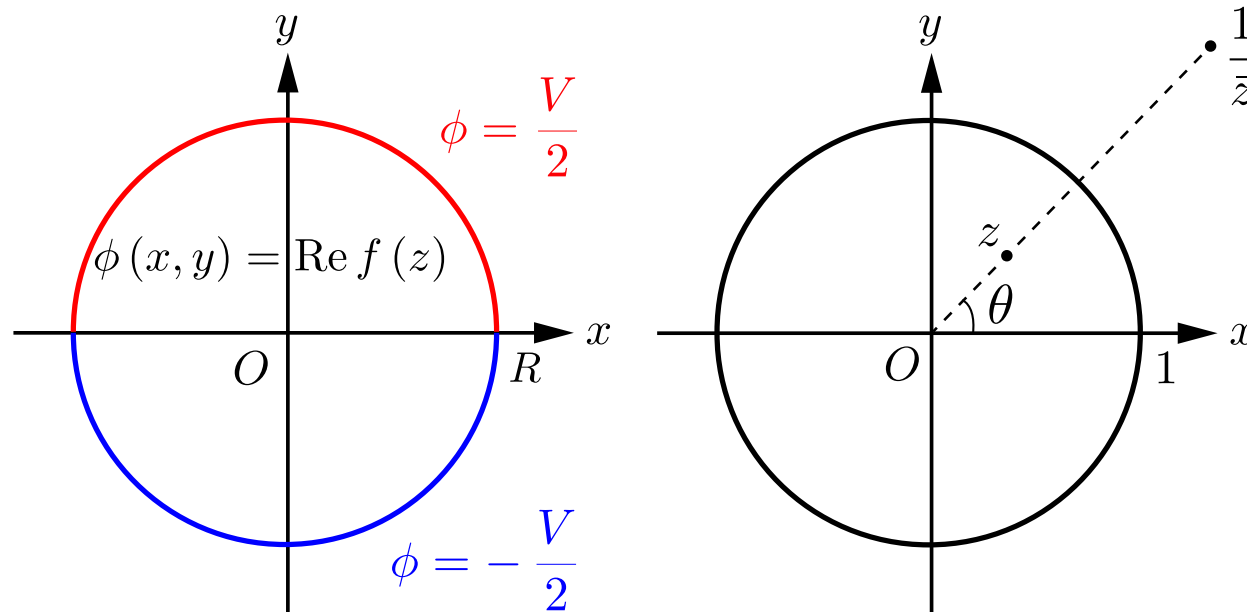
- **Potentiel électrostatique** : surface conductrice

$$\phi = \begin{cases} \phi_- = \frac{V}{2} & \text{si } x^2 + y^2 = R^2 \text{ et } y > 0 \\ \phi_+ = -\frac{V}{2} & \text{si } x^2 + y^2 = R^2 \text{ et } y < 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

- **Equation de Laplace** : à l'intérieur du cylindre : fonction harmonique

$$\nabla^2 \phi(x, y) = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial^2 y} = 0 \quad (2.35)$$

- **Cylindre conducteur creux** : rayon R et plan en coupe



- **Potentiel électrostatique** : partie réelle d'une fonction analytique

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(z) \quad \text{où} \quad z = \frac{x + iy}{R} \quad \text{ainsi} \quad |z| < 1 \quad (2.36)$$

- **Inversion du cercle** : $z \rightarrow 1/\bar{z}$ si $|z| < 1$ alors $|1/\bar{z}| > 1$ (2.38)

$$z = |z| e^{i\theta} \quad \text{alors} \quad \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{|z| e^{-i\theta}} = \frac{1}{|z|} e^{i\theta} \quad (2.39)$$

- **Formule intégrale de Cauchy** : $|z| < 1$: intégrant singulier

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (2.40)$$

- **Théorème de Cauchy** : $|1/\bar{z}| > 1$: intégrant $g(w)$ analytique

$$\oint_{|w|=1} g(w) dw = \oint_{|w|=1} \frac{f(w)}{w - \frac{1}{\bar{z}}} dw = 0 \quad (2.41)$$

- **Théorème et formule intégrale de Cauchy** : (2.40) – (2.41)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \frac{f(w)}{w - \frac{1}{\bar{z}}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} f(w) \left(\frac{w}{w-z} - \frac{w}{w - \frac{1}{\bar{z}}} \right) \frac{dw}{w} \end{aligned} \quad (2.42)$$

- **Changement de variables** : représentation polaire (module unité)

$$w = e^{i\alpha} \quad \text{alors} \quad \frac{dw}{w} = i d\alpha \quad (2.43)$$

- **Représentation intégrale** : (2.43) dans (2.42)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\alpha}) \left(\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - z} - \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - \frac{1}{\bar{z}}} \right) d\alpha \quad (2.44)$$

- **Potentiel électrostatique** : cavité cylindrique : intérieur (2.45)

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{i\alpha}) \left(\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - z} - \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - \frac{1}{\bar{z}}} \right) d\alpha$$

- **Potentiel électrostatique** : surface conductrice

$$\phi = \operatorname{Re} f(w) = \operatorname{Re} f(e^{i\alpha}) = \begin{cases} \phi_+ = \frac{V}{2} & \text{si } \alpha \in (0, \pi) \\ \phi_- = -\frac{V}{2} & \text{si } \alpha \in (\pi, 2\pi) \end{cases} \quad (2.46)$$

- **Potentiel électrostatique** : (2.46) dans (2.45)

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{V}{2} \left(\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - z} - \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - \frac{1}{\bar{z}}} \right) d\alpha \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{V}{2} \left(\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - z} - \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - \frac{1}{\bar{z}}} \right) d\alpha \end{aligned} \quad (2.47)$$

- **Potentiel électrostatique** : remis en forme

$$\begin{aligned}
 \phi(x, y) &= \frac{V}{4\pi i} \int_0^\pi \left(\frac{d(e^{i\alpha} - z)}{e^{i\alpha} - z} - \frac{d(e^{i\alpha} - \frac{1}{\bar{z}})}{e^{i\alpha} - \frac{1}{\bar{z}}} \right) d\alpha \\
 &\quad - \frac{V}{4\pi i} \int_\pi^{2\pi} \left(\frac{d(e^{i\alpha} - z)}{e^{i\alpha} - z} - \frac{d(e^{i\alpha} - \frac{1}{\bar{z}})}{e^{i\alpha} - \frac{1}{\bar{z}}} \right) d\alpha \\
 &= \frac{V}{4\pi i} \left[\ln(e^{i\alpha} - z) - \ln\left(e^{i\alpha} - \frac{1}{\bar{z}}\right) \right]_0^\pi \\
 &\quad - \frac{V}{4\pi i} \left[\ln(e^{i\alpha} - z) - \ln\left(e^{i\alpha} - \frac{1}{\bar{z}}\right) \right]_\pi^{2\pi} \\
 &= \frac{V}{4\pi i} \left(\left[\ln\left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{-i\alpha} \frac{1}{\bar{z}}}\right) \right]_0^\pi - \left[\ln\left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{-i\alpha} \frac{1}{\bar{z}}}\right) \right]_\pi^{2\pi} \right)
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

- **Identité logarithmique** :

$$\ln(-\bar{z} e^{i\alpha}) = \ln\left(\bar{z} e^{i(\alpha+\pi)}\right) = \ln(\bar{z}) + i(\alpha + \pi) \tag{2.48}$$

- **Identité logarithmique** : avec (2.48)

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{-i\alpha} \frac{1}{\bar{z}}} \right) &= \ln \left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{\left(-\frac{e^{-i\alpha}}{\bar{z}}\right) (1 - e^{i\alpha} \bar{z})} \right) & (2.49) \\ &= \ln \left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{i\alpha} \bar{z}} \right) + \ln(-\bar{z} e^{i\alpha}) = \ln \left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{i\alpha} \bar{z}} \right) + \ln(\bar{z}) + i(\alpha + \pi) \end{aligned}$$

- **Deux logarithmes** : évalués aux bornes

$$\begin{aligned} \left[\ln \left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{i\alpha} \frac{1}{\bar{z}}} \right) \right]_0^\pi &= \left[\ln \left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{i\alpha} \bar{z}} \right) \right]_0^\pi + [i(\alpha + \pi)]_0^\pi \\ &= \ln \left(\frac{1 + z}{1 + \bar{z}} \right) - \ln \left(\frac{1 - z}{1 - \bar{z}} \right) + i(2\pi - \pi) = \ln \left(\frac{(1 + z)(1 - \bar{z})}{(1 + \bar{z})(1 - z)} \right) + i\pi, \\ \left[\ln \left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{i\alpha} \frac{1}{\bar{z}}} \right) \right]_\pi^{2\pi} &= \left[\ln \left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{i\alpha} \bar{z}} \right) \right]_\pi^{2\pi} + [i(\alpha + \pi)]_\pi^{2\pi} & (2.50) \\ &= \ln \left(\frac{1 - z}{1 - \bar{z}} \right) - \ln \left(\frac{1 + z}{1 + \bar{z}} \right) + i(3\pi - 2\pi) = \ln \left(\frac{(1 - z)(1 + \bar{z})}{(1 - \bar{z})(1 + z)} \right) + i\pi. \end{aligned}$$

- **Différence entre les logarithmes** : évalués aux bornes

$$\begin{aligned}
 & \left[\ln \left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{i\alpha} \bar{z}} \right) \right]_0^\pi - \left[\ln \left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{i\alpha} \bar{z}} \right) \right]_\pi^{2\pi} \\
 &= \ln \left(\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{(1+\bar{z})(1-z)} \right) - \ln \left(\frac{(1-z)(1+\bar{z})}{(1-\bar{z})(1+z)} \right) \quad (2.51) \\
 &= \ln \left(\frac{(1+z)^2 (1-\bar{z})^2}{(1+\bar{z})^2 (1-z)^2} \right) = 2 \ln \left(\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{(1+\bar{z})(1-z)} \right)
 \end{aligned}$$

- **Potentiel électrostatique** : (2.47) dans (2.51) donne (2.52)

$$\begin{aligned}
 \phi(x, y) &= \frac{V}{4\pi i} \left(\left[\ln \left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{-i\alpha} \frac{1}{\bar{z}}} \right) \right]_0^\pi - \left[\ln \left(\frac{1 - e^{-i\alpha} z}{1 - e^{-i\alpha} \frac{1}{\bar{z}}} \right) \right]_\pi^{2\pi} \right) \\
 &= \frac{V}{2\pi i} \ln \left(\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{(1+\bar{z})(1-z)} \right) = \frac{V}{2\pi i} \ln \left(\frac{1 + (z - \bar{z}) - |z|^2}{1 - (z - \bar{z}) - |z|^2} \right)
 \end{aligned}$$

- **Changement de variable** : intérieur du cylindre $|z| \leq 1$

$$z = r e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \bar{z} = r e^{-i\theta} \quad (2.53)$$

$$z - \bar{z} = r (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = 2i r \sin \theta \quad (2.54)$$

- **Potentiel électrostatique** : coordonnées polaires (2.55)

$$\phi(r, \theta) = \frac{V}{2\pi i} \ln \left(\frac{1 - r^2 + 2i r \sin \theta}{1 - r^2 - 2i r \sin \theta} \right) = \frac{V}{\pi} \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1 + i \frac{2r \sin \theta}{1 - r^2}}{1 - i \frac{2r \sin \theta}{1 - r^2}} \right)$$

- **Identité remarquable** : démontrée en annexe

$$\arctan \left(\frac{2r \sin \theta}{1 - r^2} \right) = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1 + i \frac{2r \sin \theta}{1 - r^2}}{1 - i \frac{2r \sin \theta}{1 - r^2}} \right) \quad (2.56)$$

- **Potentiel électrostatique** : coordonnées polaires : $r \leq 1$ et $\theta = (0, 2\pi)$

$$\phi(r, \theta) = \frac{V}{\pi} \arctan\left(\frac{2r \sin \theta}{1 - r^2}\right) \quad (2.57)$$

- **Changement de variable** :

$$z = \frac{x + iy}{R} = r e^{i\theta} = r \cos \theta + i r \sin \theta \quad (2.58)$$

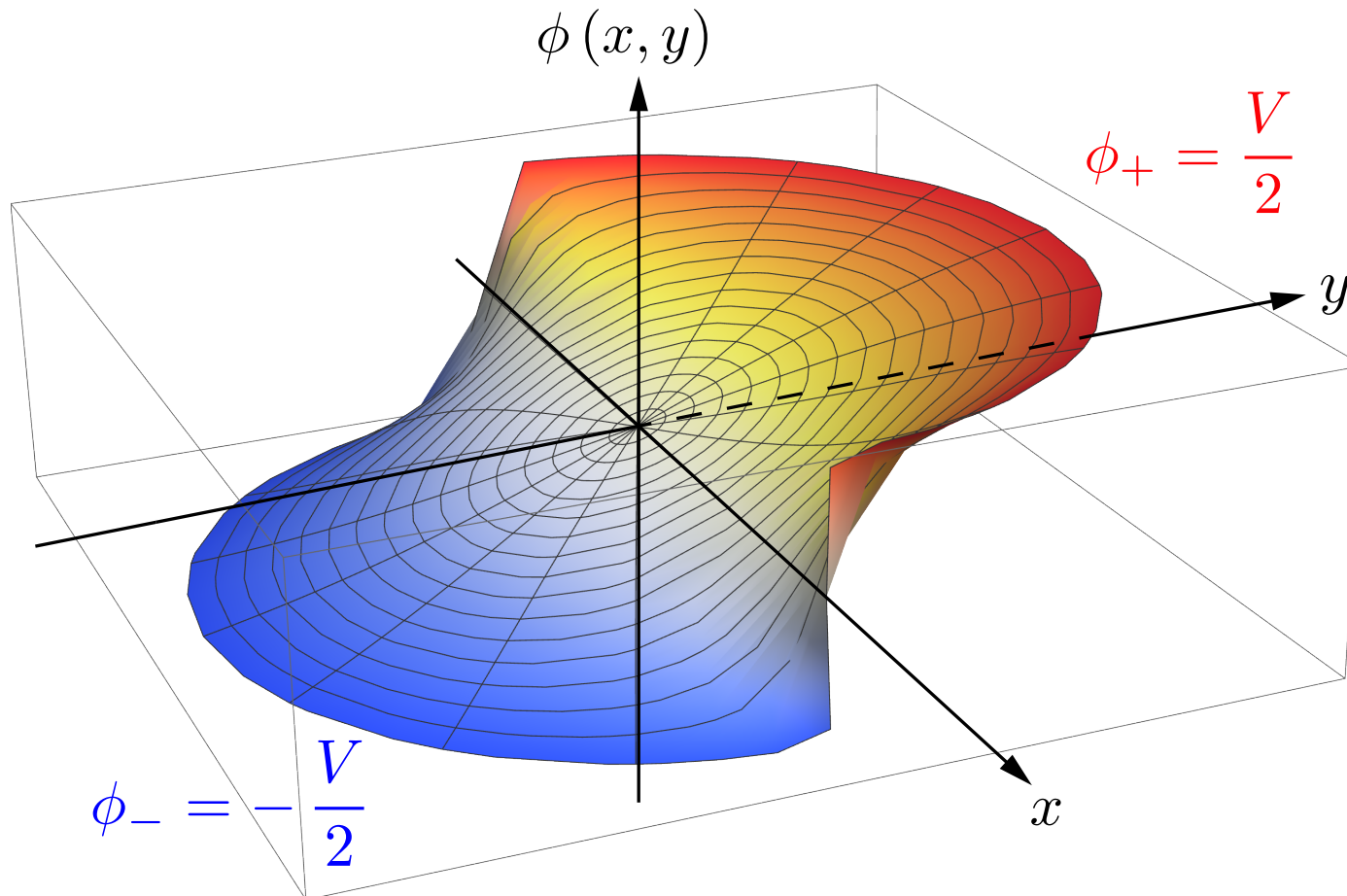
$$r^2 = |z|^2 = \frac{x^2 + y^2}{R^2} \quad \text{et} \quad r \sin \theta = \frac{y}{R} \quad (2.59)$$

- **Potentiel électrostatique** : coordonnées cartésiennes : $x^2 + y^2 \leq 1$

$$\phi(x, y) = \frac{V}{\pi} \arctan\left(\frac{2Ry}{R^2 - x^2 - y^2}\right) \quad (2.60)$$

- **Potentiel électrostatique** : coordonnées cartésiennes : $x^2 + y^2 \leq 1$

$$\phi(x, y) = \frac{V}{\pi} \arctan \left(\frac{2 R y}{R^2 - x^2 - y^2} \right) \quad (2.60)$$



- Représentation intégrale : (2.42)

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} f(w) \frac{w(z - \frac{1}{\bar{z}})}{(w - z)(w - \frac{1}{\bar{z}})} \frac{dw}{w} \quad \text{avec} \quad |z|^2 = z\bar{z} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} f(w) \frac{|z|^2 - 1}{(w - z)(\bar{z} - \frac{1}{w})} \frac{dw}{w} \quad (2.62)
 \end{aligned}$$

- Changement de variables : z dans le cercle unité et w sur le cercle

$$z = r e^{i\theta} \quad \text{et} \quad w = e^{i\alpha} \quad \text{alors} \quad \frac{dw}{w} = i d\alpha \quad (2.63)$$

- Représentation intégrale : cercle unité

$$\begin{aligned}
 f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\alpha}) \frac{1 - r^2}{(e^{i\alpha} - re^{i\theta})(e^{-i\alpha} - re^{-i\theta})} d\alpha \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\alpha}) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - r(e^{i(\theta-\alpha)} + e^{-i(\theta-\alpha)})} d\alpha \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\alpha}) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \alpha)} d\alpha \quad (2.64)
 \end{aligned}$$

- **Intégrale de Poisson** : partie réelle de la représentation intégrale (2.64)

$$\operatorname{Re} f(r e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{i\alpha}) P_r(\theta - \alpha) d\alpha \quad (2.67)$$

- **Noyau de Poisson** :

$$P_r(\theta - \alpha) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \alpha)} \quad (2.66)$$

- **Intégrale de Poisson** : $r \rightarrow 1$

$$\operatorname{Re} f(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{i\alpha}) \frac{1}{2\pi} P_1(\theta - \alpha) d\alpha \quad (2.68)$$

- **Intégrale de Poisson** : lien avec les distributions

$$\operatorname{Re} f(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{i\alpha}) \delta(\theta - \alpha) d\alpha \quad (2.69)$$

- **Distribution de Dirac** : noyau de Poisson normalisé

$$\delta(\theta - \alpha) = \frac{1}{2\pi} P_1(\theta - \alpha) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \alpha)} \quad (2.70)$$

- **Circulation du champ magnétique auxiliaire** : contour circulaire \mathcal{C} de rayon R : orientation trigonométrique

$$\Gamma_H = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \oint_{\mathcal{C}} H(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} H(R) R d\theta \quad (2.71)$$

- **Changement de variable** : plan complexe

$$z = R e^{i\theta} \quad \text{ainsi} \quad dz = i R e^{i\theta} d\theta \quad \text{et} \quad R d\theta = -i e^{-i\theta} dz \quad (2.72)$$

- **Champ magnétique auxiliaire** : plan complexe : définition

$$H(z) = H(R) e^{-i\theta} \quad (2.73)$$

- **Circulation du champ magnétique auxiliaire** : plan complexe

$$\Gamma_H = -i \oint_{\mathcal{C}} H(z) dz \quad (2.75)$$

- **Théorème des résidus** : $|z_k| < |z| = R \quad \forall k = 1, \dots, n$

$$\oint_{\mathcal{C}} H(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} H(z) \quad (2.77)$$

- **Circulation du champ magnétique auxiliaire** : plan complexe

$$\Gamma_H = 2\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} H(z) \quad (2.76)$$

- **Résidus** : courants enlacés : définis positifs sortants et négatifs entrants

$$I_k = 2\pi \operatorname{Res}_{z=z_k} H(z) = 2\pi \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) H(z) \quad (2.74)$$

Les points d'intersection z_k entre les courants électriques I_k passant à l'intérieur du chemin \mathcal{C} et le plan complexe sont des pôles simples (singularités) du champ magnétique auxiliaire $H(z)$.

- **Circulation du champ magnétique auxiliaire** : plan complexe

$$\Gamma_H = -i \oint_{\mathcal{C}} H(z) dz = 2\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} H(z) = \sum_{k=1}^n I_k \quad (2.78)$$

- **Loi d'Ampère** : théorème des résidus appliqué à la magnétostatique

$$\Gamma_H = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^n I_k \quad (2.79)$$

- **Identité :**

$$\arctan (y (x)) = \arctan (\tan x) = x \quad (2.80)$$

- **Dérivée de l'identité :**

$$\frac{d \arctan (y (x))}{dx} = \frac{d \arctan (y (x))}{dy (x)} \frac{dy (x)}{dx} = 1 \quad (2.81)$$

- **Dérivée de l'arc tangente :** (2.82)

$$\frac{d \arctan (y (x))}{dy (x)} = \left(\frac{dy (x)}{dx} \right)^{-1} = \left(\frac{d \tan (x)}{dx} \right)^{-1} = \frac{1}{1 + \tan^2 (x)} = \frac{1}{1 + y^2 (x)}$$

- **Fraction :** décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{1 + y^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + iy} + \frac{1}{1 - iy} \right) \quad (2.83)$$

- **Identité remarquable :** avec $\arctan (0) = 0$

$$\begin{aligned} \arctan (x) &= \int_0^x \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{2} \left(\int_0^x \frac{dy}{1 + iy} + \int_0^x \frac{dy}{1 - iy} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\ln (1 + ix) - \ln (1 - ix) \right) = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1 + ix}{1 - ix} \right) \end{aligned} \quad (2.84)$$